

УДК 517.958

**РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ГРАДИЕНТНЫХ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СЛОЯХ¹⁾****А.В. АНУФРИЕВА***Казанский (Приволжский) федеральный университет**E-mail: nastya-anufrieva@mail.ru***SCATTERING OF PLANE ELASTIC WAVE BY A GRADIENT TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER****A.V. ANUFRIEVA***Kazan Federal University***Аннотация**

Исследована задача дифракции плоской упругой волны на градиентном трансверсально-изотропном слое. Методом переопределенной граничной задачи получена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями третьего рода, которая решена сеточным методом. Приведены численные результаты для случая кусочно-линейного и параболического профилей упругих параметров слоя.

Ключевые слова: Анизотропия, градиентный трансверсально-изотропный слой, дифракция, упругая волна

Summary

The problem of diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer is considered. Using the method of overdetermined boundary value problem in combination with the Fourier transform method, the system of ordinary differential equations of the second order with boundary conditions of the third type is obtained which is solved by the grid method. Numerical results for the case of piecewise-constant and parabolic profiles of elastic parameters of the layer are shown.

Key words: Anisotropy, transversely isotropic gradient layer, diffraction, elastic wave

Введение

Многие геологические формации образуют слоистые структуры с упругими свойствами, которые различны в разных направлениях. Особый интерес представляют трансверсально-изотропные среды, в которых упругие модули среды одинаковы в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, но отличны от модулей в направлении оси симметрии. Как показывают исследования, многие осадочные породы являются трансверсально-изотропными. Кроме того, тонкослоистой пакет параллельных пластов, каждый из которых изотропен, но имеет свои, отличные от других пластов упругие свойства, ведет себя при деформациях как трансверсально-изотропная среда.

Также трансверсально-изотропные структуры находят применение при производстве композитов. Если в качестве армирующего материала используются волокна, уложенные параллельно друг другу, то композит имеет однонаправленную структуру и является трансверсально-изотропным материалом в плоскостях, перпендикулярных направлению армирования. Листовые металлы чаще не изотропны, и обладают нормальной (трансверсальной) анизотропией. Железобетон после появления трещин считается

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-97012-г-поволж'е-а)

трансверсально-изотропным материалом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин. Подобные структуры возникают и при производстве клееной древесины.

Дифференциальные уравнения, описывающие задачу дифракции, рассмотрены отдельно в полуплоскостях и в пластине. Задачи в полуплоскостях являются переопределенными, что позволяет установить связь между следами искомых функций на стыках сред. Таким образом, исходная задача сводится к граничной задаче для системы Ламе с граничными условиями третьего рода, как и в случае задачи дифракции упругой волны на градиентном изотропном слое [1]. К граничной задаче применяется преобразование Фурье по переменной, по которой сохраняется однородность задачи. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается сеточным методом.

Приведены результаты численных расчетов. Показаны характерные отличия потока прошедшей энергии через различные градиентные слои. Особое внимание в работе уделено линейному и параболическому градиентному профилям.

1. Постановка задачи.

Пусть на неоднородный в поперечном направлении анизотропный слой толщины L (среда 2 $\{0 < y < L\}$, с непрерывными плотностью $\rho_2(y)$ и тензором (3×3) модулей упругости $\mathbf{K}(y)$ из среды 1 $\{y > L\}$ под углом θ к оси y падает упругая гармоническая волна вида $\mathbf{u}_0(x, y) \exp\{i\omega t\}$ (см. рис. 1). В результате дифракции возникает отраженная в среду 1 волна $\mathbf{u}_1(x, y)$, прошедшая в среду 3 $\{y < 0\}$ волна $\mathbf{u}_3(x, y)$ и поле в слое $\mathbf{u}_2(x, y)$. Нужно найти полное дифрагированное поле. Среды 1 и 3 полагаем однородными и изотропными.

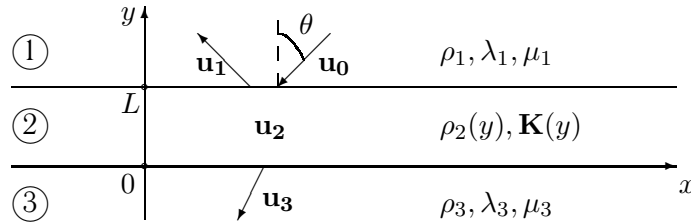


Рис. 1: Геометрия задачи

Будем искать при $y < 0$ и $y > L$ решения плоской гармонической задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_n}{\partial y} + \rho_n \omega^2 u_{xn} = 0, \quad \frac{\partial \tau_n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} + \rho_n \omega^2 u_{yn} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{xn} = (\lambda_n + 2\mu_n) \frac{\partial u_{xn}}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, \quad \sigma_{yn} = \lambda_n \frac{\partial u_{xn}}{\partial x} + (\lambda_n + 2\mu_n) \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\tau_n = \mu_n \left(\frac{\partial u_{xn}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yn}}{\partial x} \right)$$

для $n = 1, 3$ с постоянными коэффициентами Ламе λ_n , μ_n и плотностью ρ_n .

Общие уравнения двумерных колебаний записываются в виде

$$-\rho_2 \omega^2 u_{x2} = \frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y}, \quad -\rho_2 \omega^2 u_{y2} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y2}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 -\rho_2 \omega^2 u_{x2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{13} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \right) + k_{12} \frac{\partial u_{y2}}{\partial y} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{13} \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{33} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \right) + k_{23} \frac{\partial u_{y2}}{\partial y} \right), \\
 -\rho_2 \omega^2 u_{y2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{13} \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{33} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \right) + k_{23} \frac{\partial u_{y2}}{\partial y} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{12} \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{23} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \right) + k_{22} \frac{\partial u_{y2}}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

На границе раздела сред должны быть выполнены условия сопряжения

$$\begin{aligned}
 u_{x1}(x, L+0) + u_{x0}(x, L+0) &= u_{x2}(x, L-0) \quad , \quad u_{y1}(x, L+0) + u_{y0}(x, L+0) = u_{y2}(x, L-0), \\
 \tau_1(x, L+0) + \tau_0(x, L+0) &= \tau_2(x, L-0) \quad , \quad \sigma_{y1}(x, L+0) + \sigma_{y0}(x, L+0) = \sigma_{y2}(x, L-0)
 \end{aligned} \tag{5}$$

при $y = L$ и

$$\begin{aligned}
 u_{x3}(x, 0-0) &= u_{x2}(x, 0+0) \quad , \quad u_{y3}(x, 0-0) = u_{y2}(x, 0+0), \\
 \tau_3(x, 0-0) &= \tau_2(x, 0+0) \quad , \quad \sigma_{y3}(x, 0-0) = \sigma_{y2}(x, 0+0)
 \end{aligned} \tag{6}$$

при $y = 0$.

Из возможных решений системы (1), (2), (4)–(6) будем выбирать решения, соответствующие уходящим на бесконечность волнам.

2. Граничная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поле в градиентном слое.

Искомые функции системы уравнений Ламе (4) для любого фиксированного y из интервала $(0, L)$ будем рассматривать в классе $L_{1,loc}$ и будем считать, что эти функции имеют медленный рост на бесконечности по переменной x . Это позволяет применять к (4) преобразование Фурье по x , допуская как затухающие на бесконечности, так и распространяющиеся волны. Таким образом, перейдем от переменной x к переменной ξ и получим систему уравнений при $y \in (0, L)$

$$\begin{aligned}
 (k_{33}u'_{x2})' + [\rho_2 \omega^2 - k_{11}\xi^2] u_{x2} - i\xi(k_{12} + k_{33})u'_{y2} - i\xi k'_{33}u_{y2} &= 0, \\
 (k_{22}u'_{y2})' + [\rho_2 \omega^2 - k_{33}\xi^2] u_{y2} - i\xi(k_{12} + k_{33})u'_{x2} - i\xi k'_{12}u_{x2} &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

относительно образов Фурье перемещений $u_{x2}(\xi, y)$ и $u_{y2}(\xi, y)$.

Отметим, что неизвестные $u_{x2}(\xi, y)$ и $u_{y2}(\xi, y)$ по y являются обычными функциями, и, следовательно, все производные этих функций понимаются в классическом смысле. Это позволяет в дальнейшем дискретизировать задачу по переменной y . При каждом фиксированном y искомые функции по переменной ξ являются распределениями медленного роста.

Для верхней полуплоскости $\{y > L\}$ будем предполагать, что решения (1), (2) принадлежат $L_{1,loc}(R)$ и корректно определены их следы $\tau_1(x, L+0)$, $\sigma_{y1}(x, L+0)$, $u_{x1}(x, L+0)$ и $u_{y1}(x, L+0)$. В [2] получено, что

$$\begin{aligned}
 a_1(\xi)u'_{x2}(\xi, L) + a_2(\xi)u_{x2}(\xi, L) + a_3(\xi)u'_{y2}(\xi, L) + a_4(\xi)u_{y2}(\xi, L) &= f_1(\xi), \\
 a_5(\xi)u'_{x2}(\xi, L) + a_6(\xi)u_{x2}(\xi, L) + a_7(\xi)u'_{y2}(\xi, L) + a_8(\xi)u_{y2}(\xi, L) &= f_2(\xi),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$a_1(\xi) = k_{33}(L), \quad a_2(\xi) = -(k_{12}(L) + 2\mu_1)i\xi\gamma_{1,1}(\xi),$$

$$\begin{aligned}
a_3(\xi) &= k_{22}(L)\gamma_{1,1}(\xi), & a_4(\xi) &= -i(\rho_1\omega^2 - (2\mu_1 - k_{33}(L))\xi^2), \\
a_5(\xi) &= -k_{33}(L)\gamma_{2,1}(\xi), & a_6(\xi) &= i(\rho_1\omega^2 - (k_{12}(L) + 2\mu_1)\xi^2), \\
a_7(\xi) &= k_{22}(L)\xi, & a_8(\xi) &= -i(2\mu_1 - k_{33}(L))\xi\gamma_{2,1}(\xi),
\end{aligned}$$

$$f_1(\xi) = \xi\tau_0(\xi, L) + \gamma_{1,1}(\xi)\sigma_{y0}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{1,1}(\xi)u_{x0}(\xi, L) - i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{y0}(\xi, L),$$

$$f_2(\xi) = -\gamma_{2,1}(\xi)\tau_0(\xi, L) + \xi\sigma_{y0}(\xi, L) + i(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2)u_{x0}(\xi, L) - 2i\mu_1\xi\gamma_{2,1}(\xi)u_{y0}(\xi, L).$$

Здесь $k_{11}^2 = \rho_1\omega^2/(\lambda_1 + 2\mu_1)$, $k_{21}^2 = \rho_1\omega^2/\mu_1$, а ветви корней у функций $\gamma_{1,1} = \sqrt{k_{11}^2 - \xi^2}$, $\gamma_{2,1} = \sqrt{k_{21}^2 - \xi^2}$ выбираем так, чтобы вещественная часть была положительной, а, в случае, если вещественная часть равна нулю, то выбираем положительные мнимые корни.

В нижней полуплоскости $\{y < 0\}$ решения (1) будем искать в классе $L_{1,loc}$ с медленным ростом на бесконечности, считая, что следы $\tau_3(x, 0)$, $\sigma_{y3}(x, 0)$, $u_{x3}(x, 0)$ и $u_{y3}(x, 0)$ корректно определены и также принадлежат $L_{1,loc}$.

В [2] получено, что

$$\begin{aligned}
b_1(\xi)u'_{x2}(\xi, 0) + b_2(\xi)u_{x2}(\xi, 0) + b_3(\xi)u'_{y2}(\xi, 0) + b_4(\xi)u_{y2}(\xi, 0) &= 0, \\
b_5(\xi)u'_{x2}(\xi, 0) + b_6(\xi)u_{x2}(\xi, 0) + b_7(\xi)u'_{y2}(\xi, 0) + b_8(\xi)u_{y2}(\xi, 0) &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
b_1(\xi) &= k_{33}(0)\xi, & b_2(\xi) &= i(k_{12}(0) + 2\mu_3)\xi\gamma_{1,3}(\xi), \\
b_3(\xi) &= -k_{22}(0)\gamma_{1,3}(\xi), & b_4(\xi) &= -i(\rho_3\omega^2 - (2\mu_3 - k_{33}(0))\xi^2), \\
b_5(\xi) &= k_{33}(0)\gamma_{2,3}(\xi), & b_6(\xi) &= i(\rho_3\omega^2 - (k_{12}(0) + 2\mu_3)\xi^2), \\
b_7(\xi) &= k_{22}(0)\xi, & b_8(\xi) &= i(2\mu_3 - k_{33}(0))\xi\gamma_{2,3}(\xi).
\end{aligned}$$

Здесь $k_{13}^2 = \rho_3\omega^2/(\lambda_3 + 2\mu_3)$, $k_{23}^2 = \rho_3\omega^2/\mu_3$, а ветви корней у функций $\gamma_{1,3} = \sqrt{k_{13}^2 - \xi^2}$, $\gamma_{2,3} = \sqrt{k_{23}^2 - \xi^2}$ выбираем также, как для функций верхней полуплоскости.

Решения уравнения (7) с граничными условиями (8) и (9) физически представляют собой смещения (u_{x2}, u_{y2}) , которые описывают поле при $0 < y < L$ в задаче дифракции на упругом слое.

3. Численные результаты.

Искомую задачу можно решить многими приближенными методами. В настоящей работе был выбран метод конечных разностей с заданной равномерной разностной сеткой с шагом h , приближающая граничную задачу (7)–(9) с погрешностью $O(h)$. Шаг сетки должен выбираться так, чтобы разностные аналоги упругих профилей слоя адекватно описывали исходные непрерывные модели. Нужно иметь в виду, что шаг h должен быть меньше длины волны в слое и при повышении частоты колебаний шаг должен уменьшаться.

Для численных экспериментов будем рассматривать различные градиентные слои, расположенные в песчанике. Плотность всех материалов считаем примерно равной $\rho \approx 2400$ кг/м³. Постоянные Ламе для песчаника $\lambda = 7.47$ ГПа и $\mu = 5.2$ ГПа (скорость продольной волны $v_P = 2728.6$ м/с, скорость поперечной волны $v_S = 1472$ м/с). Предполагаем, что слои заполнены трансверсально-изотропными материалами. Будем исследовать градиентные слои, параметры которых от краев слоя (песчаник: $E = 0.96 \cdot 10^{10}$ Па, $E' = 1.57 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.21$, $\nu' = 0.28$, $G' = 0.52 \cdot 10^{10}$ Па) непрерывно и симметрично изменяются к середине слоя (филит: $E = 5.64 \cdot 10^{10}$ Па, $E' = 7.53 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.26$, $\nu' = 0.28$, $G' = 2.92 \cdot 10^{10}$ Па). Заметим, что изменения упругих параметров в слое могут происходить по различным законам. Прежде всего, это линейное изменение упругих параметров (линейный профиль 1 и линейный профиль 2 на рис. 2). Вторым рассмотренным в работе – параболический профиль (график 3 на рис. 2), площадь которого совпадает с площадью, ограниченной линейным профилем 1. Последний рассмотренный профиль – это экспоненциальный профиль (график 4 на рис. 2).

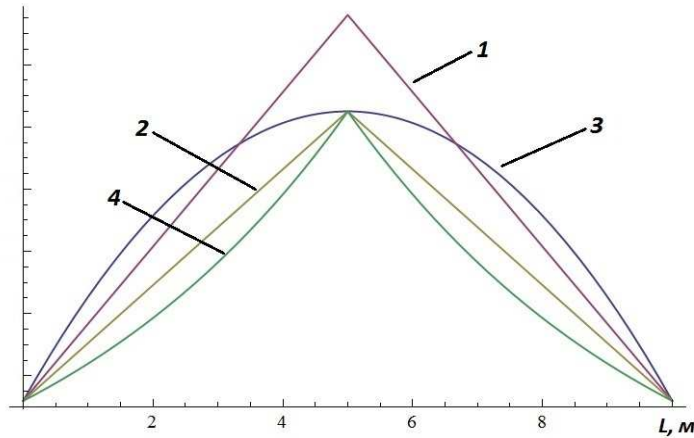


Рис. 2: Профили упругих параметров. 1 — линейный профиль 1; 2 — линейный профиль 2; 3 — параболический профиль; 4 — экспоненциальный профиль. Средние значения для линейного профиля 1 и параболического профиля совпадают.

Замечено, что при нормальном падении волны, у гладкого профиля (параболический) график будет иметь больший второй экстремум, чем в случае графика с негладким профилем (линейный и экспоненциальный). Рассмотрим зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны от частоты ω . На рис. 3 приведена зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны от частоты ω , на графике сплошная линия соответствует линейному профилю 1, точечная — линейному профилю 2, штрихованная — параболическому профилю. Видно, что параболический профиль имеет указанный экстремум на частоте $\omega \approx 3000$ рад/с.

При падении волны под углом, отличным от нуля, можно сделать вывод: если угол падения волны θ меньше, чем угол отсечки продольной волны θ'_p [3], ($\theta'_p = \arcsin(\tilde{v}_p/v'_p)$, \tilde{v}_p — скорость продольной волны в первой полуплоскости, v'_p — скорость продольной волны в плоскости упругой симметрии), то повышение частоты приводит к тому, что эффективная толщина градиентного слоя уменьшается. Это приводит к тому, что при длинах волн значительно меньше толщины слоя практически вся энергия проходит сквозь слой.

При сравнении потоков энергии для различных профилей был сделан вывод о том, что при небольших значениях толщин слоев и невысоких частотах графики для всех профилей практически не отличаются друг от друга. Данный факт объясняется тем, что длина волны значительно больше толщины слоя. При более высоких частотах важны усредненные параметры профилей, а на средних частотах начинает уже оказывать влияние структура профиля конкретного градиентного слоя. На рис. 4 приведена зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны от частоты ω . График со сплошной линией соответствует линейному профилю 2, точечный — линейному профилю 1, штрихованный — параболическому профилю. Видно, что при низких частотах (на рис. 4 до 500 рад/с) графики, соответствующие различным профилям, близки. При средних частотах, когда в слое умещается до нескольких длин волн, близкие значения прошедшей энергии дают профили, у которых среднее значение упругих параметров совпадают. При достаточно высоких частотах на дифракционную картину уже оказывает влияние сама геометрия профиля. Данные факты подтверждают и численные эксперименты, в которых была исследована зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны от угла падения θ .

4. Выводы.

При нормальном падении волны, у гладкого профиля график прошедшей энергии будет иметь больший второй экстремум, чем в случае графика с негладким профилем. При низких частотах графики, соответствующие различным профилям, близки. При средних частотах, когда в слое умещается до несколько длин волн, близкие значения прошедшей энергии дают профили, у которых среднее значение упругих па-

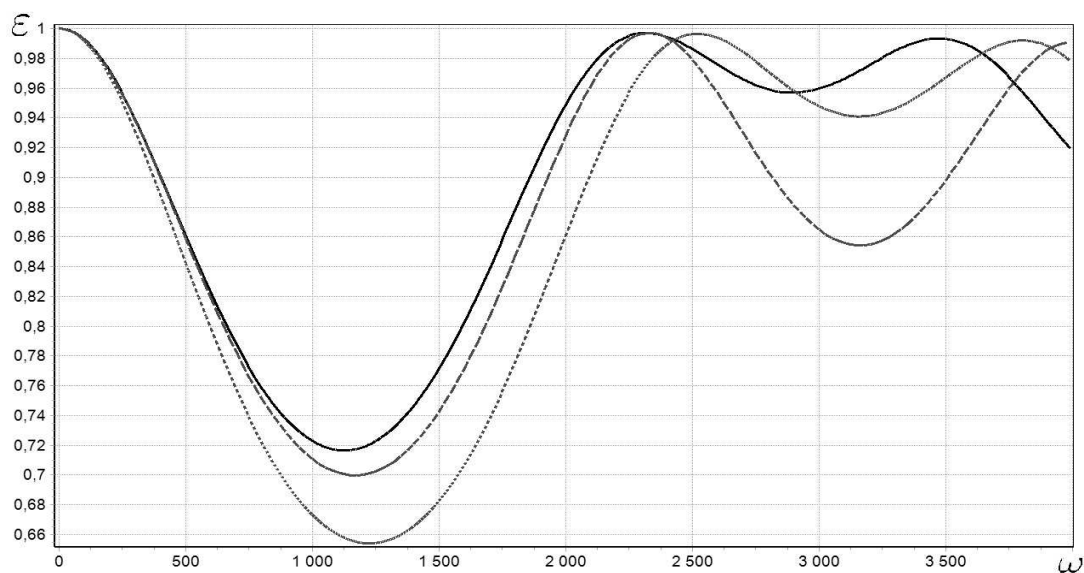


Рис. 3: Зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны при нормальном падении от частоты ω на слой толщиной $L = 10$ м, расположенный в песчанике. График со сплошной линией соответствует линейному профилю 2, точечный – линейному профилю 1, штрихованный – параболическому профилю.

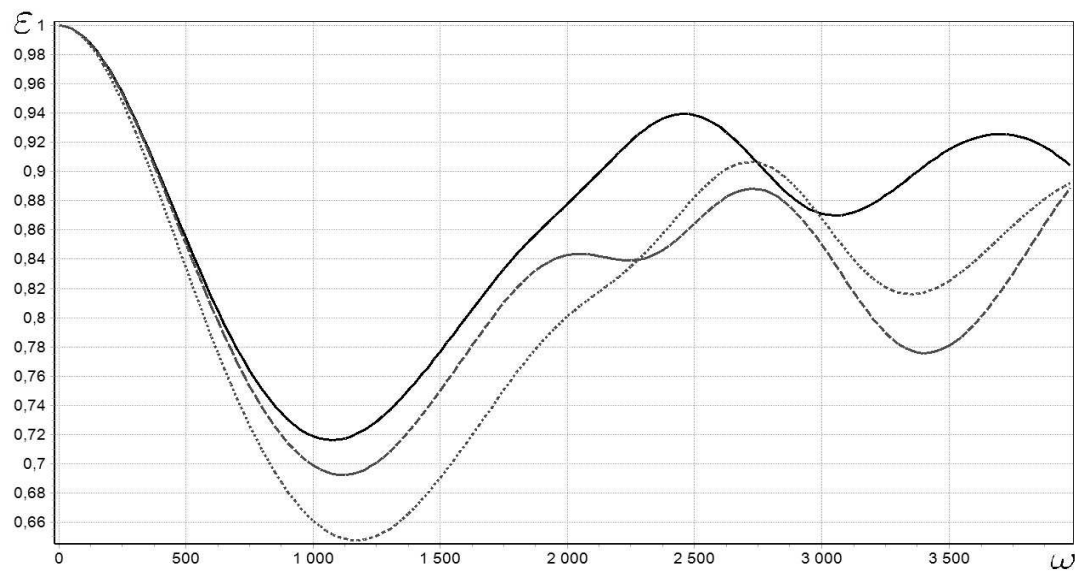


Рис. 4: Зависимость нормированной энергии прошедшей продольной волны от частоты ω при фиксированном угле падения $\theta = 10^\circ$ на слой толщиной $L = 10$ м, расположенный в песчанике. График со сплошной линией соответствует линейному профилю 2, точечный – линейному профилю 1, штрихованный – параболическому профилю.

раметров совпадают. При достаточно высоких частотах на дифракционную картину оказывает сильное влияние конкретная геометрия профиля.

Результаты, полученные относительно прохождения упругих волн через анизотропные слои, могут быть использованы в геофизике для первичного анализа структуры слоев толщи пород, а также в промышленности для проектирования различных слоистых конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ануфриева А.В., Тумаков Д.Н.** Дифракция плоской упругой волны на градиентном слое // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физ.-мат. науки. — 2012. — Т. 154, № 4. — С. 116–125.
2. **Anufrieva A.V., Tumakov D.N.** Diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer // Advances in Acoustics and Vibration. — V. 2013. — ArticleID 262067. — 8 p.
3. **Anufrieva A.V., Tumakov D.N.** On some of the peculiarities of propagation of an elastic wave through a gradient transversely isotropic layer // Days on Diffraction'2014. Int. Conf. Saint Petersburg, May 26–30, 2014. Abstracts. Universitas Petropolitana MDCCXXIV. — P. 20.

REFERENCES

1. **Anufrieva A.V., Tumakov D.N.** Diffraction of a plane elastic wave by a gradient layer [Difrakcia ploskoi uprugoi volny na gradientnom sloye] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2012. — V. 154, № 4. — P. 116–125. (In Russian)
2. **Anufrieva A.V., Tumakov D.N.** Diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer // Advances in Acoustics and Vibration. — V. 2013. — ArticleID 262067. — 8 p.
3. **Anufrieva A.V., Tumakov D.N.** On some of the peculiarities of propagation of an elastic wave through a gradient transversely isotropic layer // Days on Diffraction'2014. Int. Conf. Saint Petersburg, May 26–30, 2014. Abstracts. Universitas Petropolitana MDCCXXIV. — P. 20.